ISEG – ESTATÍSTICA I – 2º Ano/Economia-Finanças – Exame Época Normal – Duração: 2 horas – 5. 01. 11

1ª Parte - Teórica – 40m

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Turma:**_________

Formulário

$\mathrm{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$; $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \overline{X}^2$; $S'^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$; $(n-1)S'^2 = n\,S^2$

1. Sejam A e B dois acontecimentos definidos no espaço Ω com $0 < P(A) < 1$. Sejam ainda $\overline{A}$ e $\overline{B}$ os acontecimentos complementares de A e B em Ω respectivamente. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
A e $\overline{A}$ definem uma partição de Ω		
Se $A \cap B = \varnothing$, então A e B são independentes		
Se $P(A) = 1/3$ e $P(\overline{B}) = 1/4$, A e B não podem ser incompatíveis		
Seja $A \subset B$ e $P(B) > 0$. Nesse caso $P(A\mid B) = 1$		

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

2. Seja X uma variável aleatória com função distribuição $F_X(x)$. Considere ainda dois reais, a e b, com $a < b$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x < 1/2 \\ x - 1/4 & 1/2 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$, pode afirmar-se que X é contínua.		
Qualquer que seja a natureza da variável aleatória X, $P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$		
Qualquer que seja a natureza da variável aleatória X, $F_X(x-0) \le F_X(x)$, $\forall x \in \Re$		
Se $Y = X - a$, então $P(Y \le a) = F_X(2a)$		

3. Seja X uma variável aleatória de média μ e variância σ^2. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Uma distribuição simétrica tem de ser unimodal		
Se X for contínua com $\int_{-100}^{-10} f(x)dx = 1$, então $\mathrm{var}(X)$ pode ser negativa		
Se $Y = X - 4$, então $\mathrm{var}(Y) < \mathrm{var}(X)$		
Pode-se garantir que a função geradora de momentos de X existe		

vsff →

4. Considere uma variável aleatória bidimensional *(X,Y)* com função distribuição $F(x,y)$ e marginais $F_X(x)$ *e* $F_Y(y)$. Assuma a existência de todos os momentos indicados. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
$F(x,+\infty) = F_X(x)$, $\forall\, x \in \Re$		
Se X e Y forem independentes então $\operatorname{var}(XY) = \operatorname{var}(X) \times \operatorname{var}(Y)$		
Se X e Y forem identicamente distribuídas então $F(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y)$, $\forall\, x, y \in \Re$		
Se X e Y forem identicamente distribuídas então $\operatorname{cov}(X,Y) \geq 0$		

5. Considere uma amostra casual $(X_1,\ldots,X_n)$, $n > 2$, obtida de uma população X de média μ e variância σ^2 desconhecidas com função distribuição $F_X(x)$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
A variância corrigida da amostra só deve ser utilizada quando a variância amostral é negativa.		
Qualquer que seja a natureza de X , $E(\overline{X}) = E(X)$		
Se X tiver por função de distribuição $F_X(x)$, a função de distribuição da amostra será dada por $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_X(x_1) \times F_X(x_2) \times \cdots \times F_X(x_n)$, $\forall\, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \Re$		
Se X tiver distribuição normal, $T = n\,S^2 / \sigma^2$ é uma estatística		

6. Sabendo que a função geradora de momentos de uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ é dada por $M_X(s) = \exp\left(\lambda\left(e^s - 1\right)\right)$, prove que a soma de 2 variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson de parâmetro 3 e 4 respectivamente é uma Poisson de parâmetro 7. [Cotação: 15]

7. Considere as variáveis aleatórias independentes X e Y ambas com distribuição normal estandardizada. Sendo $Z = X + Y$, calcule $\rho_{X,Z}$. [Cotação: 15]

ESTATÍSTICA I – 2º Ano/Economia-Finanças – Exame Época Normal - 5.01.11
2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Turma:**_________

Cotação:

1a)	1b)	2a)	2b)	3a)	3b)	4a)	4b)	5
10	15	15	15	15	10	10	15	15

1. Num estudo de mercado feito a utilizadores da Internet constatou-se que 50% das ligações à rede (NET) são asseguradas pelo fornecedor A, 30% pelo fornecedor B e as restantes pelo fornecedor C. O resultado mais preocupante do estudo foi que 25% dos utilizadores declararam-se insatisfeitos, queixando-se quer de dificuldades de ligação quer de excessiva lentidão das comunicações. Dos utilizadores clientes do fornecedor A 26% declararam-se insatisfeitos, descendo esta percentagem para 21% entre os clientes do fornecedor B.

a) Em 20 utilizadores da Internet qual a probabilidade de pelo menos 16 estarem satisfeitos com o seu fornecedor?

b) Dos utilizadores insatisfeitos qual a percentagem de clientes do fornecedor C?

2. A duração, em minutos, de uma inspecção de rotina a um equipamento é uma variável aleatória X com função densidade probabilidade:

$$f(x) = \frac{3x^2}{8000} \qquad (0 < x < k)$$

a) Mostre que k =20 e calcule o tempo médio de duração daquele tipo de inspecções.

b) Em 10 intervenções deste tipo, qual a probabilidade de nenhuma ter um tempo de execução que exceda 5 minutos.

3. Admite-se que o tempo de atendimento de uma pessoa num balcão de informações, em minutos, segue uma distribuição gama com média 5 minutos e variância igual a 2.5.

a) Qual a percentagem de pessoas com um tempo de atendimento inferior a 5 minutos?

b) Numa fila estão 5 pessoas à espera de ser atendidas. Calcule a probabilidade do tempo total de atendimento dessas pessoas ser superior a meia hora.

4. Considere uma população com distribuição normal de média 10.

a) Qual a probabilidade do desvio padrão de uma amostra casual de dimensão 25 ser inferior ao desvio padrão da população?

b) Sabendo que a variância da população é igual a 16 qual deve ser a dimensão mínima da amostra a inquirir para que a probabilidade da média da amostra diferir da média da população por menos de uma unidade seja superior a 0.9.

5. Seja (X,Y) uma variável aleatória com função densidade conjunta

$$f(x,y) = x\,y \qquad (0 < x < 2, 0 < y < 1)$$

Calcule $P(Y > X)$.